Temario de Álgebra Lineal

1. Espacios Vectoriales
1.1 Números Complejos
1.2 Definición y propiedades de espacio vectorial
1.3 Subespacios y suma directa
1.4 Independencia Lineal
1.5 Bases y Dimensión

2. Transformaciones Lineales
2.1 Definición y ejemplos
2.2 Espacio nulo y rango
2.3 La matriz de una transformación lineal
2.4 Cambio de base y similaridad
2.5 Determinante

3. Producto interno y ortogonalidad
3.1 El producto interno
3.2 Longitud, ortogonalidad
3.3 Complemento ortogonal y proyección en un subespacio
3.4 Transformación unitaria

4. Valores y vectores propios
4.1 Definición y propiedades básicas
4.2 Multiplicidad
4.3 Matriz triangular superior
4.4 Matriz diagonal

Bibliografía

1. Axler, S. (2015). *Linear algebra done right*. Springer.
2. Shapiro, H. (2015). *Linear algebra and matrices*. AMS, Providence, Rhode Island.

Temario de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Teoría básica
1.1 Existencia y unicidad. Método de aproximaciones sucesivas
1.2 Dependencia continua o diferenciable respecto a condicionales iniciales y parámetros
1.3 Ecuación autónoma y espacio fase

2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales
2.1 Sistema homogéneo
2.2 Caso de coeficientes constantes. Exponencial de una matriz
2.3 Sistema no-homogéneo. Método de Variación de parámetros y de coeficientes indeterminados

3. Teoria Cualitativa
3.1 Estabilidad de Sistemas Lineales
3.2 Estabilidad de puntos fijos
3.3 Método de Liapunov
3.4 Retrato fase
3.5 Teorema de Poincaré-Bendixson

Bibliografía

3. Braun, M. (1993). *Differential Equations and their Applications*, Springer.
4. Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press.
5. Teschl, G. (2024). *Ordinary differential equations and dynamical systems* (Vol. 140). American Mathematical Society.

Temario de Análisis

1. Topología en Rn
1.1 Conjuntos Abiertos y Cerrados
1.2 Cerradura y frontera de un conjunto
1.3 Sucesiones y Convergencia

2. Continuidad
2.1 Conjuntos compactos en Rn
2.2 Conjuntos Conexos
2.3 Funciones Continuas
2.4 El Teorema del Valor Intermedio

2. Diferenciación
2.1 Definición y propiedades básicas
2.2 Regla de la Cadena
2.3 Teorema del Valor Medio
2.4 Teorema de Taylor. Máximos y Mínimos
2.5 Teoremas de la Función Implícita e Inversa

3. Integración
3.1 Definición y propiedades de la Integral de Riemann
3.2 Conjuntos de volumen y medida cero
3.3 Funciones Riemann Integrables
3.4 Teorema de Fubini
3.5 Cambio de Variables

Bibliografía

6. A. W. Knapp; *Basic Real Analysis*; Birkhäuser. (2005)
7. J. E. Marsden, M. J. Hoffman: *Elementary Classical Analysis*, 2nd ed. Freeman & Co. New York. (1993)
8. M. Spivak, *Calculus on Manifolds*. The Benjamin/Cumming, Menlo Park Ca, 1965

Doctorado en Ciencias con orientación en Matemáticas Aplicadas

Examen de Admisión

21 de Junio 2024

Instrucciones:

- Elige dos problemas de cada sección
- Para acreditar los problemas es necesario argumentar claramente.
- La evaluación es individual y a libro cerrado. No se permite y tampoco es necesario el uso de calculadoras o cualquier otro dispositivo electrónico.
- Duración: 4 horas.

Al firmar esta hoja, te comprometes a actuar de forma ética durante la realización del examen.

Nombre y apellido:

Universidad y ciudad:

1. Análisis

   (a) Supongamos que en $\mathbb{R}$, se tiene para todo n, $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$, y $b_{n+1} \leq b_n$. Prueba que a_n converge.

   (b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x|^2$ para todo x. Prueba que f es diferenciable en 0. Generaliza paraa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

   (c) ¿Para que p es r^p integrable en el complemento de la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$?

2. Álgebra Lineal

   (a) Considera las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

   ¿Para qué valores de α tiene solución la ecuación matricial $AX = B$?

   (b) Sea A una matriz de 3×3 tal que sus valores propios son $0, \lambda_1, \lambda_2$, con $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Supongamos que v_0, v_1, v_2 son los vectores propios respectivos.

i. Describe $Ker\, A$, $Im\, A$

ii. Resuelve la ecuación $Ax = v_1 + v_2$

iii. Explica si $Ax = v_0$ tiene solución.

(c) Calcula A^{30}, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(a) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Demuestra que el sistema

$$\dot{x} = g(x)$$

$$\dot{y} = f(x)y$$

tiene a lo más una solución en cuaquier intervalo para un PVI dado.

(b) Calcula e^{At} si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(c) Determina el tipo de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ y dibuja el retrato fase del sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2$$

4. Complemento

(a) Prueba que no existe un mapeo continuo suprayectivo de $[0, 1]$ a $(0, 1)$.

(b) ¿Existe una transformacíon lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?

(c) Sea $A : I \to L(\mathbb{R}^n)$ continua. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \times I \times I \to \mathbb{R}^n$ la función que satisface:
(i) $\varphi(\xi, \tau, \tau) = \xi$,
(ii) $\dot{\varphi}(\xi, \tau, t) = A(t)\varphi(\xi, \tau, t)$.
Demuestra:

i. Si $\psi(t)$ es solución de $\dot{x} = A(t)x$, entonces $\psi(t) = \varphi(\psi(\tau), \tau, t)$.

ii. φ es lineal en la primer variable.