Cálculo

1. Geometría del espacio euclidiano

1.1 Producto interno

1.2 Vectores en el espacio tridimensional y producto cruz

1.3 Coordenadas esféricas y cilíndricas

2. Diferenciación

2.1 Límites, continuidad

2.2 Derivadas, derivadas parciales, regla del producto y regla de la cadena

2.3 Aproximación y polinomio de Taylor. Método de Newton

2.4 Problemas de optimización, ecuaciones de punto crítico, multiplicadores de Lagrange, criterio de la segunda derivada.

3. Integración

3.1 Integral, interpretación geométrica y métodos de integración: Fracciones parciales, sustituciones trigonométricas.

3.2 Integral de línea, superficie, flujo y volumen. Fórmulas de cambios de variables.

3.3 Teoremas fundamentales del cálculo (divergencia, Green, Stokes)

Bibliografía

1. Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2004). Cálculo Vectorial. Addison-Wesley
2. Stewart, J. (2012). *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning.

Álgebra lineal

1. Ecuaciones Lineales
1.1 Matrices y operaciones elementales
1.2 Matrices escalón y solución de ecuaciones
1.3 Producto de matrices, matrices invertibles
1.4 Determinantes, interpretación geométrica y regla de Cramer

2. Espacios vectoriales
2.1 Independencia lineal
2.2 Bases y dimensión
2.3 Subespacio vectorial

3. Transformaciones Lineales
3.1 Núcleo y Rango
3.2 Subespacios de matrices
3.3 Cambio de bases
3.4 Valores y vectores propios

4. Ortogonalidad
4.1 Proyecciones
4.2 Gram-Schmidt

Bibliografía

1. Strang, G. (2000). Introduction to linear algebra.

Ecuaciones diferenciales

1. Ecuaciones de primer orden

1.1 Ecuaciones lineales
1.2 Separación de variables
1.3 Ecuaciones exactas

2. Ecuaciones lineales de segundo orden

2.1 Wronskiano e independencia lineal
2.2 Reducción de orden
2.3 Variación de parámetros

3. Aplicaciones

3.1 Problemas de mezclas
3.2 Circuitos eléctricos
3.3 Vibraciones mecánicas. Oscilador armónico

Bibliografía

1. Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2021). *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons.

2. Braun, M. (1993). *Differential Equations and their Applications*, Springer.

Maestría en Ciencias con orientación en Matemáticas Aplicadas

Examen de Admisión

Junio 3 2024

Instrucciones:

- Elige dos problemas de cada sección
- Para acreditar los problemas es necesario argumentar claramente.
- La evaluación es individual y a libro cerrado. No se permite y tampoco es necesario el uso de calculadoras o cualquier otro dispositivo electrónico.
- Duración: 4 horas.

Al firmar esta hoja, te comprometes a actuar de forma ética durante la realización del examen.

Nombre y apellido:

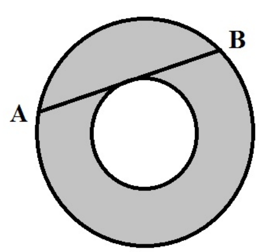
Universidad y ciudad:

1. Cálculo Multivariable

   (a) Encuentra la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$ en el punto $(2, -2, -2)$.

   (b) Calcula la suma infinita $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^k$.

   (c) En el ánulo en el dibujo, la cuerda AB del círculo exterior es tangente al círculo interior y su longitud es 10cm. Encuentra el área del ánulo.



2. Álgebra Lineal

(a) Encontrar valores de a, de tal manera que el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - ay &= 2 \end{aligned}$$

tenga solución única, no tenga solución, tenga un número infinito de soluciones.

(b) Sea A la matriz de 4×4

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

La suma de las entradas de cualquier columna de A es igual a 0. Determina el rango de A.

(c) Sean $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ y $x = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, determina

$$\lim_{n \to \infty} = \frac{||A^n x||_2}{||B^n x||_2}$$

3. Ecuaciones Diferenciales

(a) Encuentra la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

(b) Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ soluciones de la ecuación diferencial

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

$p(t)$ y $q(t)$ funciones suaves. El wronskiano se define por

$$W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

Prueba que el wronskiano satisface la ecuación

$$W' + p(t)W = 0.$$

(c) Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y + y^4 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

4. Complemento

(a) Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de los números en las caras superiores sea mayor o igual a 9.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, definida positiva. Escribe un programa (seudo código) para calcular una matriz triangular inferior L con entradas diagonales diferentes de cero, tal que A sea igual al producto de L por su transpuesta

$$A = LL^T.$$

(c) Sea $t > 0$. Muestra que existe una única solución de la ecuación

$$t = x\mathrm{e}^x.$$

(d) Para cualquier matriz P de $n \times n$ considerese la suma $R(P) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k$. Prueba que si $\sum_{k=0}^{\infty} ||P^k|| < \infty$, entonces $(I-P)^{-1}$ existe y $R(P) = (I-P)^{-1}$

(e) Determina la estabilidad del origen en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= 3x - xy \\ y' &= xy - 5y \end{aligned}$$

Maestría en Ciencias con orientación en Matemáticas Aplicadas

Examen de Admisión

Mayo 15 2024

Instrucciones:

- Elige SOLO DOS problemas de cada sección
- Para acreditar los problemas es necesario argumentar claramente.
- La evaluación es individual y a libro cerrado. No se permite y tampoco es necesario el uso de calculadoras o cualquier otro dispositivo electrónico.
- Duración: 4 horas.

Al firmar esta hoja, te comprometes a actuar de forma ética durante la realización del examen.

Nombre y apellido:

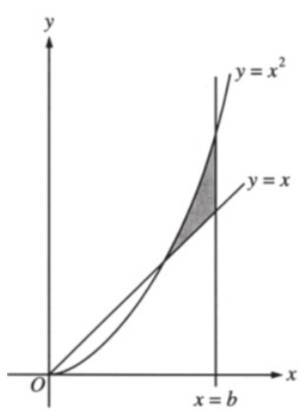
Universidad y ciudad:

1. Cálculo Multivariable

   (a) Aproxima $\sqrt{4.01}$,

   (b) La densidad por unidad de volumen de un sólido, esta dada por la función $\rho(x, y, z) = x$. Encuentra la masa, si el sólido ocupa en el primer octante, la porción de un cilindro de radio a en el plano x, y y altura h en el eje z.

   (c) Calcula el área sombreada en el dibujo, sabiendo que $\int_0^b x dx = \int_0^b x^2 dx$.



2. Álgebra Lineal

   (a) Sean $a \in \mathbb{R}$. Considera la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   Encuentra A^{-1}, A^{100}.

   (b) Considera el subespacio en $\mathbb{R}^3$ definido por el plano

   $$x + y + z = 0.$$

   Encuentra una base.

   (c) Determina todos los números $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el límite $\lim_{n\to\infty} a^n A^n$ existe y es finito, donde A es la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Ecuaciones Diferenciales

   (a) Considera la ecuación diferencial

   $$\dot{x} = x^{1/3}, \ x(0) = 0$$

   i. Demuestra que $x(t) \equiv 0$ es solución.

   ii. Demuestra que $x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ es solución.

   iii. ¿Qué puedes decir sobre la ecuación diferencial y la no unicidad de la solución?

   (b) Determina la solución general de la siguiente ecuación diferencial

   $$x' = rx(1 - x/K)$$

   (c) Resuelve el siguiente problema de valores iniciales

   $$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + 16y &= \operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \\ \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

4. Complemento

(a) Sea X una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $[3,9]$. Encuentra x_0 de tal manera que $P(\{3 < X < x_0\}) = 1/5$.

(b) Escribe un programa (seudo código) que reciba una lista de n números enteros positivos, y regrese dos listas separando números pares e impares.

(c) Prueba que la integral
$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}},$$
es convergente.

(d) Considera el Problema con Valores Iniciales (PVI)
$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$
Supongamos que $f(x_0) \neq 0$ y $F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}$. Prueba que toda solución del PVI satisface $F(x(t)) = t$.

(e) Describe la región en el plano a, b, c donde la matriz
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
tiene valores propios reales.